[1162.] 分布函數ノ漸近展開ニツイテ

宮澤光一（小樽高商）

分布函數ノ Charlier 式展開ニ於ケル近似評價ヲ求メヨウトスルモノナリ。

$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ ヲ獨立確率變數列トシ、コレラハ同一分布函數 $F(x)$ ヲモチ，$F(x)$ ハ平均値 0，標準偏差 σ，ニヒ次數 $k\ (\geqq 3)$ ノ絶對能率 β_k ヲモツモノトス。

$F(x)$ ノ特性函數ヲ $f(t)$，變數 $(X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n)/\sqrt{n}\sigma$ ノ分布函數ヲ $\mathcal{F}_n(x)$，ソノ特性函數ヲ $f_n(t)$ トスレバ

$$f_n(t)=\left\{f\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right\}^n$$ ナリ.

更ニ特性函數 $f(t)$ ハ $\limsup_{|t|\to\infty}|f(t)|<1$

ナル條件ヲ満スモノトス。

コノトキ，$\mathcal{F}_n(x)$ ニ関シ次ノ漸近展開式ヲ得ル。

[定理] $\mathcal{F}_n(x)$ ハ次ノ如ク展開サレル。

$$\mathcal{F}_n(x) = \Phi(x) + \sum_{\nu=3}^{k-1} (-1)^\nu A_{\nu n} \frac{\Phi^{(\nu)}(x)}{n^{\nu/2}} + R_{kn}(x)$$

$k = 3l$ ノトキハ $\quad |R_{kn}(x)| < \dfrac{M}{n^{l/2}}$

$k = 3l+1,\ k = 3l+2$ ノトキハ

$$|R_{kn}(x)| < \frac{M}{n^{\frac{l+1}{2}}}$$

コヽニ

① $\quad \Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \quad \Phi^{(\nu)}(x) = \dfrac{d^\nu \Phi(x)}{dx^\nu}$

② $\quad A_{\nu n} = \displaystyle\sum_{\alpha}\left(\frac{n\lambda_\alpha}{\alpha!}\right)^\beta \frac{1}{\beta!}$

$\sum_\alpha$ ハ ν ノ約數 α（$\geqq 3$ ナルモノ）ニツイテ加ヘルモノニシテ $\beta = \nu/\alpha$ ナリ。又 $\lambda_\alpha = \dfrac{\gamma_\alpha}{\sigma^\alpha}$ トシ，$A_{\nu n}$ ハ n ニツイテハ高々 $\nu/3$（$< \frac{\nu}{2}$）次ナリ。

③ $\quad$ M ハ k 及ビ $F(x)$ ニノミ從屬シ n 及ビ x トハ無関係ナル常數ナリ。

本定理ノ系トシテ次ガ成立スル。

系．モシ β_3 ガ有限デ存在スレバ、上定理デ $k=3.1$

ナル故

$$\left|\mathcal{F}_n(x) - \Phi(x)\right| < \frac{M}{\sqrt{n}}$$

ガ成立スル。

Cramér (Random variables and Probability distribution) ノ方法ニナラッテ、本定理ヲ証明スルコトニスル。

θ ヲ以テ $|\theta| \leqq 1$ ナル或ル常数，Θ_k ヲモッテ $|\Theta_k|$ ガ k 及ビ $F(x)$ ニノミ從屬スル或ル一定數ヨリ小ナル如キ或ル數ヲ表ハスモノトス．先ヅ次ノ Lemma カラ証スル。

Lemma. 1. $|t| \leqq \sqrt[6]{n}$ ナルトキ

$$e^{\frac{t^2}{2}} f_n(t) = 1 + \sum_{\nu=3}^{k-1} A_{\nu n}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^{\nu} + R_k$$

コヽニ

$k = 3l$ ノトキ

$$R_k = \Theta_k \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{l} \cdot |t|^{k}$$

$k = 3l+1$ ノトキ

$$R_k = \Theta_k \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{l+1} \left(|t|^{k} + |t|^{k+2}\right)$$

$k = 3l+2$ ノトキ

$$R_k = \Theta_k \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{l+1} \left(|t|^{k} + |t|^{k+1}\right)$$

（証明）　β_k ガ有限デ存在スル故，次ノ展開ヲ得ル。

$$(1)\quad f\left(\frac{t}{\sqrt{n}\,\sigma}\right) = 1+\sum_{\nu=2}^{k-1}\frac{\alpha_\nu}{\nu!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)^{\nu} + \theta\,\frac{\beta_k}{k!}\left(\frac{t}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)^{k}$$

コレヲ　$= 1 + P$

トオク．然ラバ次ノ如ク書ケル。

$$(2)\quad \log(1+P) = \sum_{1\leqq j<\frac{k}{2}} (-1)^{j+1}\frac{P^{j}}{j} + \Theta_k P^{\frac{k}{2}}$$

而シテ、P ハ形式的ニハ t ノ多項式ニシテ、ソノ優級数ハ

$$\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{\beta_k^{1/k}|t|}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)^{\nu}$$

ナリ、ヨッテ $1\leqq j<\frac{k}{2}$ ニ対シテ

$$P^{j} = \sum_{\nu=2j}^{k-1}\delta_{\nu j}\left(\frac{it}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)^{\nu} + \theta\sum_{\nu=k}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{j\beta_k^{1/k}|t|}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)^{\nu}$$

$$= \sum_{\nu=2j}^{k-1}\delta_{\nu j}\left(\frac{it}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)^{\nu} + \Theta_k\left(\frac{j\beta_k^{1/k}|t|}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)^{k}$$

$$= \sum_{\nu=2j}^{k-1}\delta_{\nu j}\left(\frac{it}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)^{\nu} + \Theta_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{k}$$

コヽニ、$\delta_{\nu j}$ ハ t ト無関係ナリ。

カクテ (1), (2) ヨリ $\log f\left(\frac{t}{\sqrt{n}\,\sigma}\right)$ ハ it ノ冪ニ $(it)^{k-1}$ マデ展開出来、剰余ハ $O(t^k)$ ナリ．又，半不変係数ノ定義カラ、コノ展開ニ於ケル $(it/\sqrt{n}\,\sigma)^{\nu}$ ノ係数ハ $\gamma_\nu/\nu!$ ナリ．ヨッテ

$$\log f\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)=\sum_{\nu=2}^{k-1}\frac{\gamma_\nu}{\nu!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}\sigma}\right)^\nu+\textcircled{H}_k\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^k$$

$$\therefore\quad \log f_n(t)=n\log f\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)$$

$$=n\sum_{\nu=2}^{k-1}\frac{\gamma_\nu}{\nu!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}\sigma}\right)^\nu+\textcircled{H}_k\, n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^k$$

$$=-\frac{t^2}{2}+\sum_{\nu=3}^{k-1}\frac{n\lambda_\nu}{\nu!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^\nu+\textcircled{H}_k\, n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^k$$

$$\therefore\quad Q=\log e^{\frac{t^2}{2}}f_n(t)$$

$$=\sum_{\nu=3}^{k-1}\frac{n\lambda_\nu}{\nu!}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^\nu+\textcircled{H}_k\, n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^k$$

ヨッテ，e^Q ヲ $it/\sqrt{n}$ ノ冪ニ $(it/\sqrt{n})^{k-1}$ マデ展開シテ

$$e^Q=e^{\frac{t^2}{2}}f_n(t)$$

$$=1+\sum_{\nu=3}^{k-1}A_{\nu n}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right)^\nu+R(t)$$

トオケバ、$A_{\nu n}$ ハ定理ノ如ク與ヘラレルコトヲ知ル。

$R(t)$ ヲ評價スルタメ、Q ノ優級數ヲ求ムレバ

$$\textcircled{H}_k\sum_{\nu=3}^{\infty}\frac{n}{\nu!}\left(\frac{|t|}{\sqrt{n}}\right)^\nu$$

即チ $\quad \textcircled{H}_k\dfrac{|t|^3}{\sqrt{n}}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\dfrac{1}{\nu!}\left(\dfrac{|t|}{\sqrt{n}}\right)^\nu$

デ與ヘラレル。ヨッテ Q^j ノ優級數ヲ求ムレバ

$$\textcircled{H}_k\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^j |t|^{3j} \sum_{\nu=0} \frac{1}{\nu!}\left(\frac{j|t|}{\sqrt{n}}\right)^\nu$$

ナリ,

今、$k=3l$ ノトキヲ考ヘレバ（然ラザルトキノ結果ニツイテモ同様ニ証明出来ル）次ノ展開式

$$e^Q=\sum_{j=0}^{l-1}\frac{Q^j}{j!}+\theta\cdot Q^l e^{|Q|}$$

ニ於テ $|t|\leqq\sqrt[6]{n}$ ナルトキ

$$|Q|<\textcircled{H}_k(\sqrt[6]{n})^3\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\textcircled{H}_k$$

ナルコトヲ考ヘテ、e^Q ニ於ケル t^k 以上ノ項ハ、各 Q^j デ生ズル t^k 以上ノ項ニツキ整頓シタモノナリ. 即チ

$$R(t)=\textcircled{H}_k\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^l\cdot|t|^k$$

q. e. d.

Lemma 1 デ $(it)^\nu$ ノ代リニ, $(-1)^\nu\Phi^{(\nu)}(x)$ ヲ用ヒテ次式ヲ考ヘル。

$$\mathcal{F}_n(x)=\Phi+\sum_{\nu=3}^{k-1}(-1)^\nu A_{\nu n}\frac{\Phi^{(\nu)}}{n^{\nu/2}}+R_{kn}(x)$$

$$f_n(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}+\sum_{\nu=3}^{k-1}A_{\nu n}\frac{(it)^\nu}{n^{\nu/2}}+r_{kn}(t)$$

トオケバ

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}d\mathcal{F}_n(x)=f_n(t),\ \int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}d\Phi^{(\nu)}(x)=(-it)^\nu e^{-\frac{t^2}{2}}$$

ナコトカラ

$$\gamma_{kn}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dR_{kn}(x)$$

而シテ, Lemma 1 カラ, $t=0$ ノ近リデ $\gamma_{kn}(t) = O(t^k)$ ナコトカラ

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^\nu dR_{kn}(x) = 0 \qquad \text{for} \quad \nu = 0, 1, \cdots\cdots, k-1$$

コッテ、$0<w<k$ ナルトキ、w 次ノ積分ニ関スル Cramér ノ定理ヨリ

$$J_w R_{kn}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{(-it)^{w+1}} \gamma_{kn}(t)\, dt$$

コノ関係ハ $w=0$ ノトキ、右辺ノ積分ガ絶対収斂ノ故ラ $w=0$ ニ對シテモ成立ス。

コレヲ用ヒテ、次ノ Lemma 2ヲ証ス。

Lemma 2. $0 \leqq w \leqq k-1$ ニ對シテ次ヲ得.

$$J_w R_{kn}(x) = \frac{1}{\pi} \mathcal{R}\int_{\sqrt{n}}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{(-it)^{w+1}} f_n(t)\, dt + R$$

コヽニ

$k = 3l$ ノトキ

$$R = \textcircled{H}_k\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{l}$$

$k=3l+1,\ k=3l+2$ ノトキ

$$R = \textcircled{H}_k\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{l+1}$$

（証明）

$$J_w R_{kn}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx}}{(-it)^{w+1}}r_{kn}(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\Re\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-itx}}{(-it)^{w+1}}r_{kn}(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\Re\int_{\sqrt{n}}^{\infty}\frac{e^{-itx}}{(-it)^{w+1}}f_n(t)\,dt$$

$$+\theta\left\{\int_{0}^{\sqrt[6]{n}}\frac{|r_{kn}(t)|}{t^{w+1}}dt+\int_{\sqrt[6]{n}}^{\sqrt{n}}\frac{|f_n(t)|}{t^{w+1}}dt+\int_{\sqrt[6]{n}}^{\infty}\frac{|r_{kn}(t)-f_n(t)|}{t^{w+1}}dt\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\Re\int_{\sqrt{n}}^{\infty}\frac{e^{-itx}}{(-it)^{w+1}}f_n(t)\,dt+\theta(A_1+A_2+A_3)$$

$k=3l$ ノトキノミヲ証ス。（然ラザルトキモ同様ニ証サル）

$$A_1=\text{Ⓗ}_k\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^l\int_0^{\infty}\frac{t^k}{t^{w+1}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\text{Ⓗ}_k\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^l$$

$|t|\leqq\sqrt{n}$ ナルトキ $|f_n(t)|\leqq e^{-\frac{t^2}{3}}$ ナルコトヲ用ヒテ

$$A_2<\int_{\sqrt[6]{n}}^{\infty}\frac{e^{-\frac{t^2}{3}}}{t^{w+1}}dt<\int_{\sqrt[6]{n}}^{\infty}t\,e^{-\frac{t^2}{3}}dt=\frac{3}{2}e^{-\sqrt[3]{n}}=\text{Ⓗ}_k\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^l$$

$$1+\sum_{\nu=3}^{k-1}A_{\nu n}\frac{(it)^\nu}{n^{\nu/2}}=\text{Ⓗ}_k(1+t^k)$$

$$\therefore\quad A_3=\text{Ⓗ}_k\int_{\sqrt[6]{n}}^{\infty}\frac{1+t^k}{t^{w+1}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\text{Ⓗ}_k\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^l$$

カクテ、Lemma 2 ガ証サレタ。　　q. e. d.

（定理ノ証明）

Lemma 2 カラ、例ヘバ $k=3l$ ノトキハ（然ラザ

ルトキモ同様ニ証サル。)

$$\left|J_w R_{kn}(x)\right| < \int_{\sqrt{n}}^{\infty} \frac{|f_n(t)|}{t^{w+1}}\,dt + \textcircled{H}_k\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{l}$$

コンデ t ノ代リニ、$\sqrt{n}\sigma t$ ヲ用ヒレバ

$$= \sigma^{-w} n^{-\frac{w}{2}} \int_{1/\sigma}^{\infty} \frac{|f_n(\sqrt{n}\sigma t)|}{t^{w+1}}\,dt + \textcircled{H}_k\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{l}$$

而シテ $\limsup_{|t|\to\infty} |f(t)| < 1$ ナル條件カラ $t > 1/\sigma$ ナルトキ，$c > 0$ ニシテ $|f(t)| < e^{-c}$ ナルモノヲ求ムルコトが出来ル．

又 $f_n(\sqrt{n}\sigma t) = \{f(t)\}^n$

$$\therefore \left|J_w R_{kn}(x)\right| < \sigma^{-w} n^{-\frac{w}{2}} \int_{1/\sigma}^{\infty} \frac{e^{-cn}}{t^{w+1}}\,dt + \textcircled{H}_k\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{l}$$

$$= \sigma^{-w} n^{-\frac{w}{2}} e^{-cn}\left[-\frac{t^{-w}}{w}\right]_{1/\sigma}^{\infty} + \textcircled{H}_k\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{l}$$

$$< M\left(\frac{e^{-cn}}{w} + n^{-\frac{l}{2}}\right)$$

コヽニ，M ハ k 及ビ F ニノミ從属シ n, x, w トハ無關係ナル常數ナリ．

ヨッテ

$0 < w < 1$ トシ，$h > 0$ ニ對シテ M. Riesz ノ定理カラ次ヲ得。

$$(3)\quad \left|\frac{1}{\Gamma(w)}\int_{x-h}^{x}(x-t)^{w-1} R_{kn}(t)\,dt\right| < M\left(\frac{e^{-cn}}{w} + n^{-l/2}\right)$$

ココデ $h = n^{-\frac{l}{2}}$, $\nu = 1/\log n$ トオケバ

$$|R_{\kappa n}(x)| < M \cdot n^{-\frac{l}{2}}$$

ヲ得ル。

q. e. d.